

ЛЕКЦИЯ 3 по “Приложна математика”, сп. БИТ

Катедра “Приложна математика и моделиране”

Доц. д-р Снежана Г. Гочева, каб. 540

Производна на функция. Пресмятане на производна.

Производни от по-висок ред.

**Понятие за частна производна на функция на много
променливи**

Диференциал на функция.

Приложение на производните в икономиката.

Производна на функция

Определение 3.1. Дадена е функцията $y = f(x)$, $x \in D$.

Производна на функцията $f(x)$ в точката $x_0 \in D$ се нарича границата

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$
 където $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$,
ако тази граница съществува.

Забележка! Производната е локално свойство на функцията в определена точка. Когато производната съществува във всяка точка от дефиниционната си област, казваме, че функцията има производна или е диференцируема в D .

А) Геометричен смисъл на производната в дадена точка $x_0 \in D$:

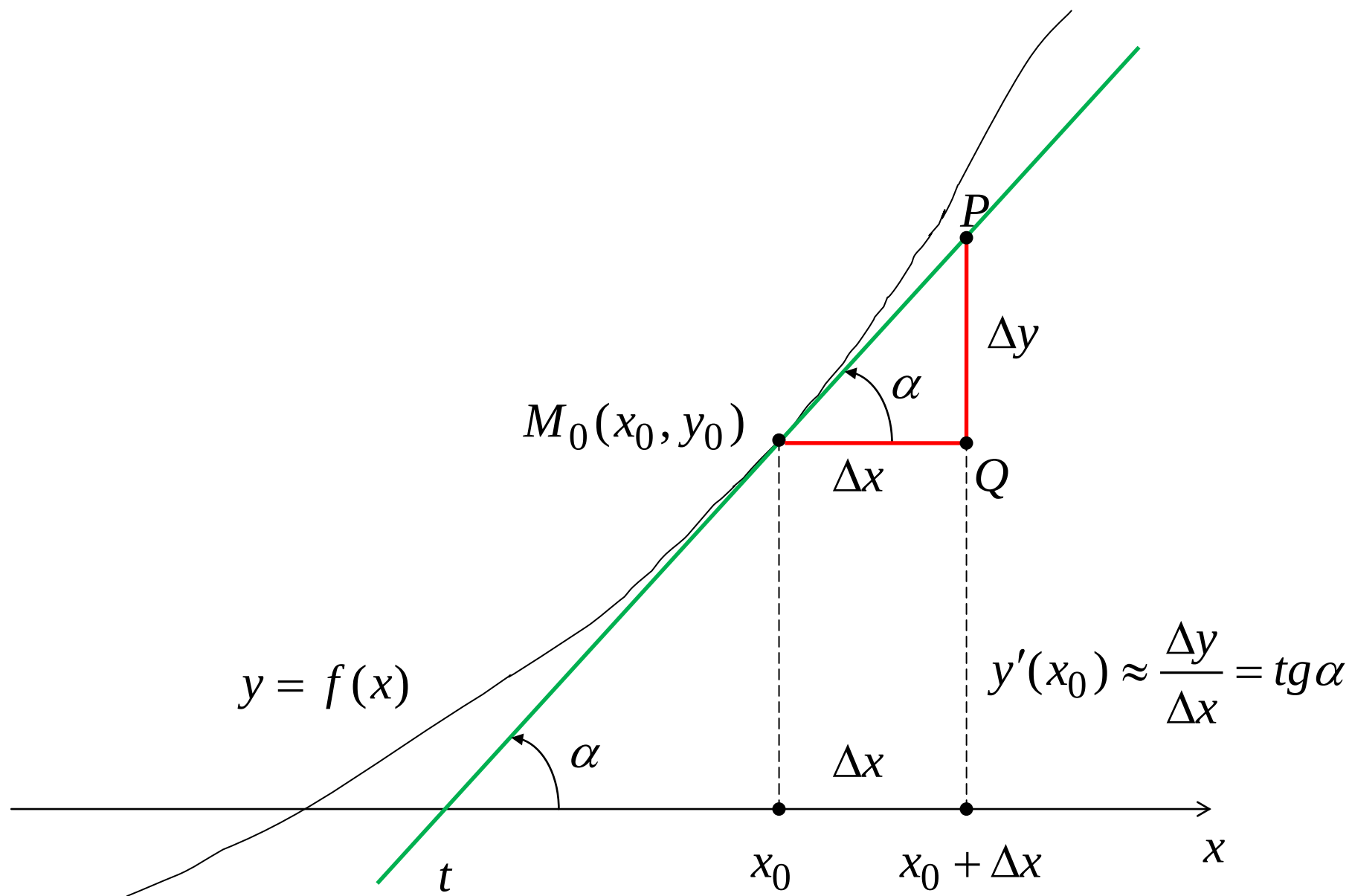
Като се използва определението за тангенс в правоъгълния триъгълник M_0PQ , веднага се вижда, че

$$y'(x_0) \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

където α е ъгълът, който сключва допирателната t към графиката на $f(x)$ в допирната точка M_0 с положителната посока на абсцисната ос Ox – виж Фиг.1.

След граничния преход ще имаме равенството:

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$



Фиг.1. Геометричен смисъл на производната.

В случая на фиг. 1 стойностите на функцията се увеличават (нарастват) при увеличаване (нарастване) на аргумента x , при което ъгъл α е в интервала $(0, 90^0)$ и тангенсът е положителен. Тогава, съгласно дефиницията имаме:

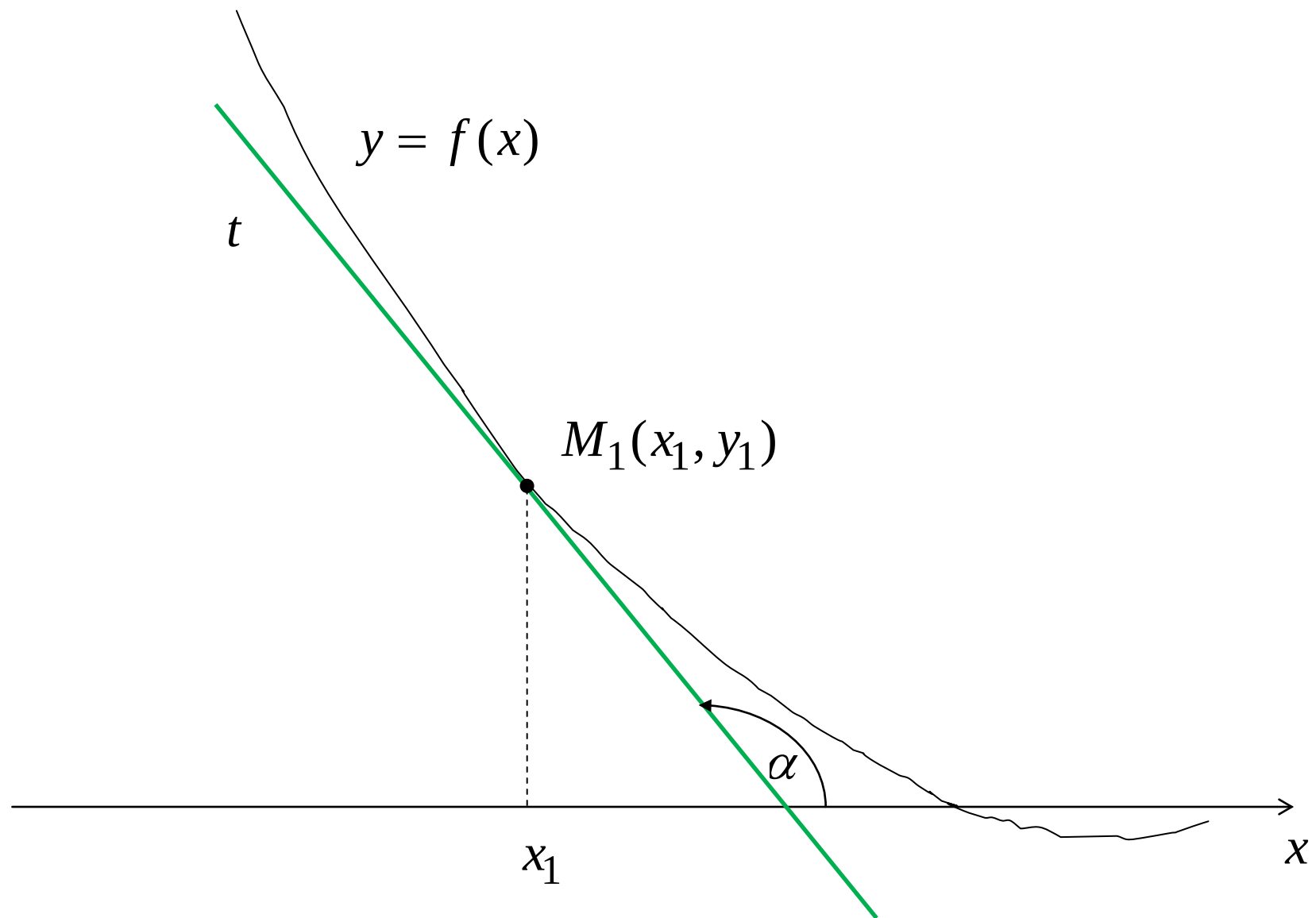
$y'(x) \approx \operatorname{tg} \alpha > 0$ - функцията е растяща в околност на точката x_0 .

Аналогично при обратен наклон на допирателната – виж Фиг. 2 – тангенсът е отрицателен и функцията намалява, т.е.:

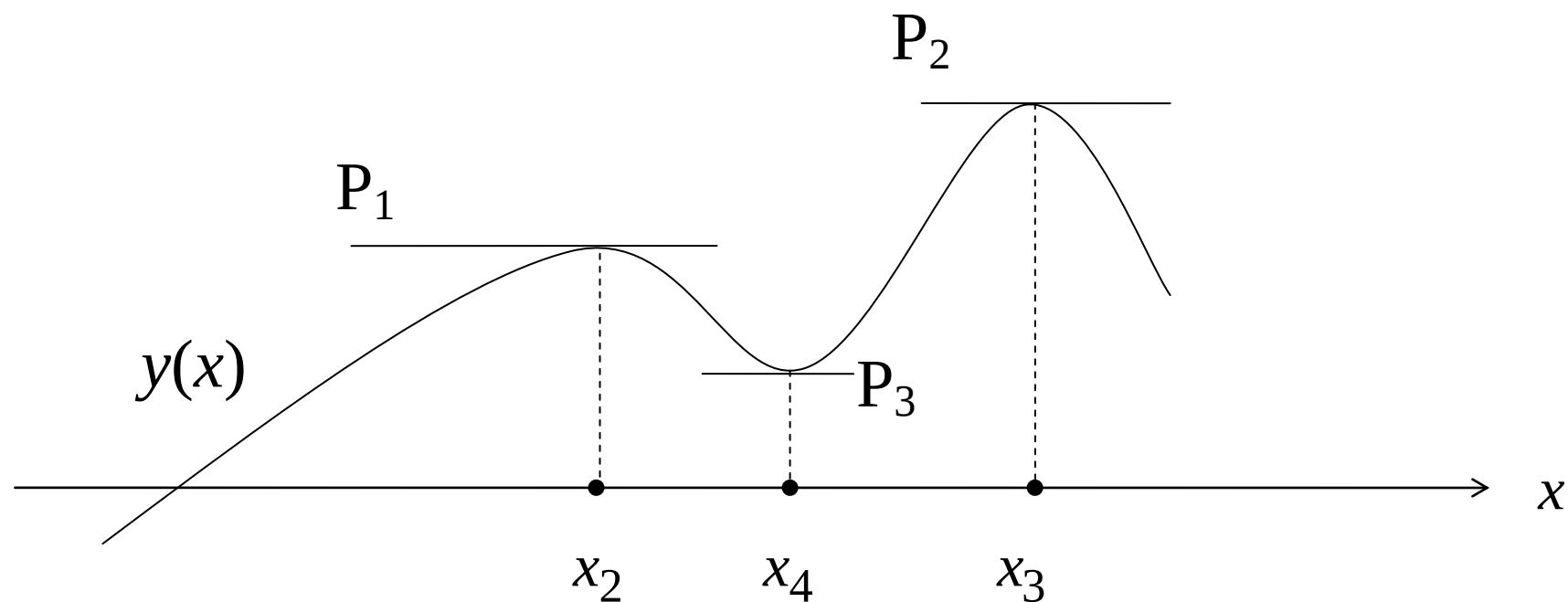
$y'(x) \approx \operatorname{tg} \alpha < 0$ - функцията е намаляваща в околност на точката x_1 .

Ако в една точка производната съществува и $\alpha = 0$, то има условия функцията да не намалява и да не расте и да има евентуален екстремум.

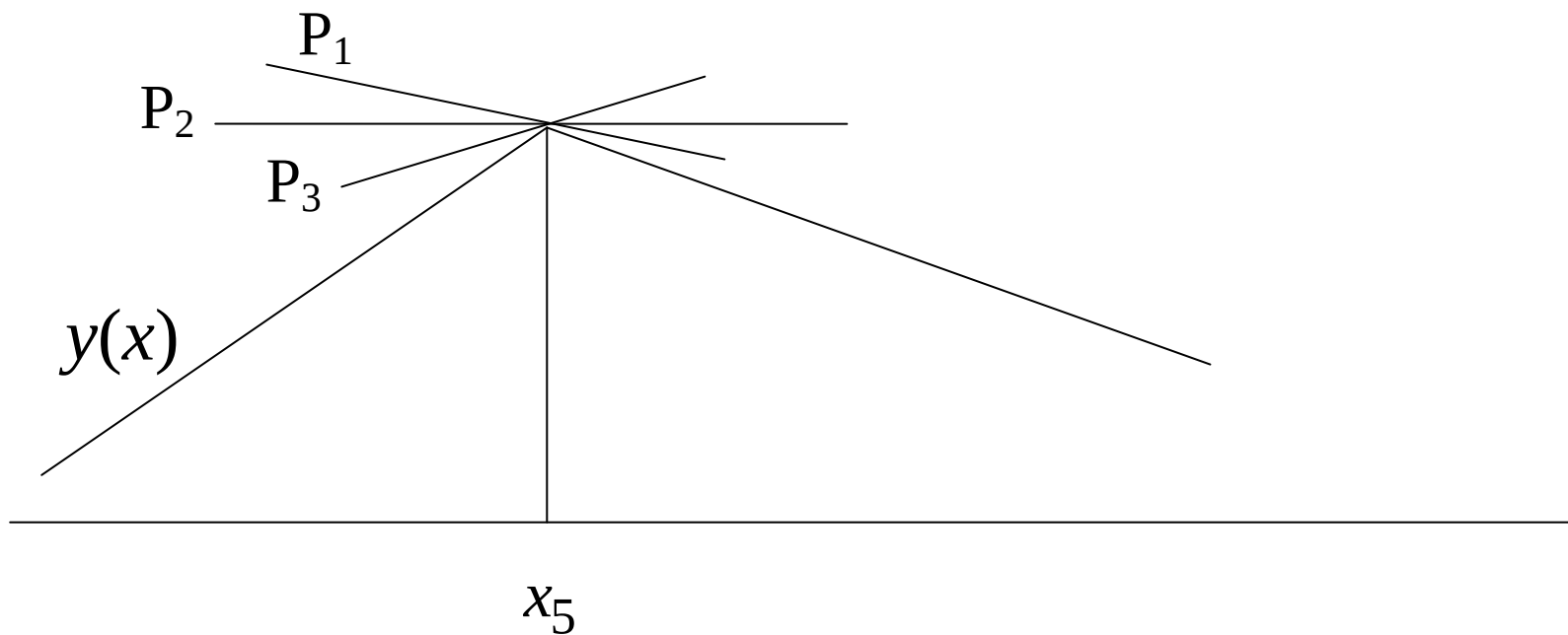
$y'(x_2) = \operatorname{tg} \alpha = 0$ - възможно е функцията да има локален максимум или минимум в околност на точката (виж Фиг. 3).



Фиг.2. Намаляваща функция в околност на т. x_1 (случай $y'(x) < 0$).



Фиг.3. Локален максимум и минимум на функция $y(x)$ в околност на вътрешна точка. Показаната функция има локален максимум в т. x_2 и x_3 и локален минимум в т. x_4 (необходимо условие за това е ъглите на допирателните с Ox да са нули, т.е. допирателните да са успоредни на Ox).



Фиг.4. В случая на ръб, очевидно има много допирателни $P_1, P_2, \dots$ към графиката на функцията $y(x)$. Може строго да се покаже, че в такъв случай, напр. в т. x_5 , не съществува границата

$y'(x_5) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\Delta x = x - x_5$ и следователно **НЯМА** производна в **тази точка**. (А има ли производни в останалите точки от D ?)

Б) Физичен смисъл на производната

y' - е скоростта на изменение на функцията $y = f(x)$ спрямо аргумента x . Положителната скорост означава нарастване, отрицателната – намаляване. y' показва тенденцията на изменение на функцията и какво може да се очаква в близкото бъдеще (или минало).

Еквивалентни означения на производната

1. $y'(x)$ - четем: “игрек прим от хикс”
2. y'_x - четем: “игрек прим спрямо хикс” или “производна на игрек спрямо хикс”
3. $\frac{dy}{dx}$ - четем: ”де игрек делено на де хикс”. Означава също диференциал на y относно променливата x .

Основни правила за диференциране на функции

(виж също Таблица на производните във файл Formuli 1)

1) $(c)' = 0$ - производна на константа

2) $(cu)' = cu'$ - производна на произведение на константа с функция

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$ - производна на сума (разлика) на две функции u и v

4) $(u.v)' = u'.v + u.v'$ - производна на произведение на две функции

5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$ - производна на частно на две функции

6) $(u(v(x)))' = u'_v \cdot v'_x$ - производна на функция от функция (сложна функция)

Пресмятане на производна на функция

Пример 1. Извод на 1). От определение 3.1 за $y(x) = c$ имаме:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0.$$

Пример 2. Извод на 2) От определение 3.1 за $y(x) = cu$:

$$\begin{aligned}(c.u)' = y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{cu(x + \Delta x) - cu(x)}{\Delta x} = \\ &= c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = c.u'(x).\end{aligned}$$

Пример 3. Да се намери производната на функцията $y(x) = x$

$$(x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Пример 4. Да се намери производната на функцията $y(x) = x^2$

$$\begin{aligned}(x^2)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 2x + 0 = 2x.\end{aligned}$$

Пример 5. С помощта на таблицата на производните да се пресметнат първите производни на следните функции:

А) $y = 5x^2 + 7x - 4.25$

Б) $y = \sqrt{3x}$

В) $y = x \sin x$

Г) $y = \frac{\sin x}{x^2}$

Д) $y = x^2 e^x \cos x$

Е) $y = 4e^{-3x}$

Ж) $y = \ln(x^3 + 1)$

З) $y = \sin^4 \left(\frac{2x+3}{1-x} \right)$

Решение:

А) Сума на функции:

$$y' = (5x^2)' + (7x)' - (4.25)' = 5(x^2)' + 7(x)' - 0 = 5 \cdot 2 \cdot x + 7 \cdot 1 - 0 = 10x + 7.$$

Б) Умножение на функция с константа:

$$y' = (\sqrt{3x})' = (\sqrt{3} \cdot \sqrt{x})' = \sqrt{3} \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{\left(\frac{1}{2} - 1 \right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}.$$

В) Произведение на функции:

$$y' = (x \sin x)' = (x)' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x.$$

Г) Частно на функции:

$$y' = \left(\frac{\sin x}{x^2} \right)' = \frac{x^2 (\sin x)' - (x^2)' \cdot \sin x}{x^4} = \frac{x^2 \cos x - 2x \sin x}{x^4}.$$

Д) Произведение от три функции:

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 e^x \cos x)' = (x^2 e^x)' \cos x + x^2 e^x (\cos x)' = \left((x^2)' e^x + x^2 (e^x)' \right) \cos x + \\ &\quad x^2 e^x (-\sin x) = (2x e^x + x^2 e^x) \cos x - x^2 e^x \sin x = e^x (x^2 \cos x + 2x \cos x - x^2 \sin x) \end{aligned}$$

Е) Сложна функция (функция от функция):

$$y' = (4e^{-3x})' = 4(e^u)'_u \cdot (-3x)'_x = -4e^{-3x} \cdot (-3) \cdot 1 = -12e^{-3x}.$$

Ж) Сложна функция: $\ln(u)$, $u = x^3 + 1$.

$$y' = \left(\ln(x^3 + 1) \right)' = \left(\ln(u) \right)'_u \cdot (u)'_x = \frac{1}{u} \cdot (x^3 + 1)' = \frac{1}{(x^3 + 1)} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{(x^3 + 1)}.$$

З) Функция от функция от функция: u^4 , $u = \sin(v)$, $v = \frac{2x+3}{1-x}$

$$\begin{aligned} y' &= \left[\sin^4 \left(\frac{2x+3}{1-x} \right) \right]' = \left[(u)^4 \right]'_u \cdot (\sin v)'_v \cdot \left(\frac{2x+3}{1-x} \right)'_x = \\ &= 4u^3 \cdot \cos(v) \cdot \frac{(2x+3)' \cdot (1-x) - (2x+3) \cdot (1-x)'}{(1-x)^2} = \\ &= 4 \sin^3 \left(\frac{2x+3}{1-x} \right) \cdot \cos \left(\frac{2x+3}{1-x} \right) \cdot \frac{5}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Производни от по-висок ред

Втора производна на функция $y''(x)$ - намира се като се диференцира първата производна.

Трета производна $y'''(x)$ - диференцираме втората производна ...

Пример 6. Да се пресметнат вторите производни на следните функции:

$$\text{А) } y = 2x - \cos(3x) \qquad \text{Б) } y = \frac{4-x}{3x^2+2}$$

Решение:

А) Намираме : $y'(x) = 2 + 3\sin(3x)$. Диференцираме полученото:

$$y'' = (y'(x))' = 9\cos(3x) .$$

С помощта на система Mathematica смятаме така:

За y' намираме $\partial_x 2x - \cos 3x$;

получаваме: $2+3 \sin[3 x]$.

За y'' намираме $\frac{\partial}{\partial x} (2+3 \sin[3 x])$ и получаваме: $9 \cos[3 x]$.

Б) Първата производна е:

$$y' = \left(\frac{4-x}{3x^2+2} \right)' = \frac{(4-x)'(3x^2+2) - (3x^2+2)'(4-x)}{(3x^2+2)^2} =$$
$$\frac{-(3x^2+2) - 6x(4-x)}{(3x^2+2)^2} = \frac{-3x^2 - 2 - 24x + 6x^2}{(3x^2+2)^2} = \frac{3x^2 - 24x - 2}{(3x^2+2)^2}$$

Втората производна е:

$$y'' = \frac{3x^2 - 24x - 2}{(3x^2 + 2)^2} = \frac{(6x - 24)(3x^2 + 2)^2 - 2(3x^2 + 2) \cdot 6x \cdot (3x^2 - 24x - 2)}{(3x^2 + 2)^4} =$$

$$= \frac{(6x - 24)(3x^2 + 2) - 12x(3x^2 - 24x - 2)}{(3x^2 + 2)^3} = \frac{-18x^3 + 216x^2 + 36x - 48}{(3x^2 + 2)^3}.$$

С помощта на система Mathematica смятаме така:

За y' намираме:

$$\partial_x \frac{4 - x}{3x^2 + 2}$$

Together %

получаваме:
$$\frac{-2 - 2(4x + 3x^2)}{2 + 3x^2}.$$

За y'' намираме:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{4 - x}{3x^2 + 2}$$

и получаваме:

$$-\frac{6 - 6x - (36x^2 + 3x^3)}{2 + 3x^2}.$$

Задача. Намерете на ръка третата производна на функцията от Пример 6-а.

Задача. Намерете с компютър първа, втора и трета производна на всички функции от Пример 5.

Понятие за частна производна на функция на много променливи

Нека е дадена функция на няколко променливи:

Напр. функция на две независими променливи: $u = f(x, y)$

Функция на три независими променливи: $u = f(x, y, z)$ и т.н.

Определение 3.2.

Ако е дадена функцията $f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, то
частна производна относно x на функцията $f(x, y)$ в точката

$(x_0, y_0) \in D$ се нарича границата

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}, \text{ където } \Delta x = x - x_0,$$

ако тази граница съществува. Т.е. частната производна е обикновена производна при фиксирани стойности на другите независими променливи, в случая при фиксирано $y = y_0 \in D$.

Аналогично се дефинира частна производна относно y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}, \text{ при фиксирано } x = x_0 \in D.$$

Втори частни производни са производни от първите относно една независима променлива и съответно фиксирани останалите променливи (ако съответните граници съществуват).

Напр. втора частна производна само по x е:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \Delta x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Напр. втора частна производна (смесена производна) по y спрямо първа производна по x е:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Пример 7. Да се пресметнат всички първи частни производни на следните функции:

А) $f = x^5 - 3xy + 8\sqrt{y}$

Б) $f = \frac{3+x}{4y^2+1}$

Решение:

А) $\frac{\partial f}{\partial x} = \left(x^5 - 3xy + 8\sqrt{y} \right)'_x = 5x^4 - 3y, \quad (y \text{ се счита за константа}).$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(x^5 - 3xy + 8\sqrt{y} \right)'_y = -3x + \frac{4}{\sqrt{y}}, \quad (x \text{ е константа}).$

С помощта на система Mathematica смятаме така:

За $\frac{\partial f}{\partial x}$ набираме $\partial_x \ x^5 - 3x * y + 8 \ y$

получаваме: $5x^4 - 3y$

За $\frac{\partial f}{\partial y}$ набираме $\partial_y \ x^5 - 3x * y + 8 \ y$ и получаваме: $-3x + \frac{4}{y}$

$$\text{Б) } \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{3+x}{4y^2+1} \right)'_x = 1, \text{ (} y \text{ е константа).}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{3+x}{4y^2+1} \right)'_y = -\frac{8y(3+x)}{(4y^2+1)^2}, \text{ (} x \text{ е константа).}$$

Задача. Намерете на ръка всички втори частни производни на функциите от Пример 7.

Задача. Намерете с компютър всички частни производни от първи и втори ред на функциите:

А) $f(x, y) = \cos(x + 3y)$

Б) $f(x, y) = \frac{1}{1 + \arctan(xy - 2)}$

В) $f(x, y) = \frac{x + 4y}{x^2 + y^2}$

Г) $f(x, y, z) = x^3 + 3x^2y + yz^3$

Диференциал на функция

Понятието „диференциал” е въведено от Лайбниц и Бернули за изразяване на безкрайно малки величини.

Определение 3.3.

Нека $y(x)$ е диференцируема функция в някакъв интервал. Формално означаваме

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} . \text{ (четем „игрек прим равно на де игрек делено на де хикс”)}$$

Оттук получаваме диференциала на y :

$$dy = y'(x)dx$$

(четем „де игрек е равно на игрек прим по де хикс”).



Готфрид Вилхелм Лайбниц

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Лайбниц е един от най-големите универсални учени в света. Всъщност, списъкът на неговите значителни научни приноси е толкова голям, колкото и неговите ранообразни дейности. Като инженер той е изчислявал елементи на машини, часовници и даже машини за минното дело. Като библиотекар е създал съвременния каталог. Като математик е създал основите на топологията, но е един и от основателите на диференциалното и интегралното смятане, заедно с Нютон. Въведените от него означения са станали стандарт. В логиката е работил върху двоичните системи, и много други. Като физик е постигнал значителни успехи в механиката и по-специално в теорията на моментите. Има приноси и в лингвистиката, историята, естетиката и политическата теория.

(Internet Encyclopedia of Philosophy)

Правила за пресмятане на диференциали

Те са аналогични на тези за намиране на производни, съгласно
Определение 3.3.

1) $d(c) = 0$ - диференциал на константа

2) $d(cu) = c \cdot du$ - диференциал на произведение на константа с функция

3) $d(u \pm v) = du \pm dv$ - диференциал на сума(разлика) на две функции u и v

4) $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$ - диференциал на произведение на две функции

5) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$ - диференциал на частно на две функции

6) $d(u(v(x))) = du \cdot dv$ - диференциал на функция от функция (сложна функция)

Пример 8. Да се пресметнат диференциалите на следните функции:

$$\text{А)} \quad y = 5x^3 - 2x$$

$$\text{Б)} \quad y = \operatorname{tg} (x^2 - 7x + 2)$$

Решение:

$$\text{А)} \quad dy = y' dx = (5x^3 - 2x)' dx = (15x - 2) dx$$

$$\text{Б)} \quad dy = y' dx = \left(\operatorname{tg} (x^2 - 7x + 2) \right)' dx = \left(\frac{1}{\cos^2 (x^2 - 7x + 2)} \cdot (2x - 7) \right) dx$$

Приложения на производните в икономиката

Пример 9. Установено е, че фирма „Донев ООД” след t години е натрупала приходи по закона

$$f(t) = 1,7t^2 + 2,4 \text{ млн. лв}$$

Да се намерят приходите в следващ момент $t + \Delta t$ и да се изчисли $f(t + \Delta t)$ при $t = 3$ години и $\Delta t = 1/2$ години.

Решение: От дефиницията за производна имаме приближеното равенство

$$f'(t) \approx \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Тогава $f(t + \Delta t) \approx f(t) + f'(t)\Delta t$ (*)

Изчисляваме: $f'(t) = (1,7t^2 + 2,4)' = 3,4t$.

Заместваме в (*) с по-горе дадените стойности:

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t) &\approx f(3 + 0,5) \approx f(3) + 0,5 f'(3) \\ &= 1,7 \cdot 3^2 + 2,4 + 0,5(3 \cdot 3,4) = 17,7 + 5,1 = 22,8 \end{aligned}$$

Отговор: $f(3,5) \approx 22,8$

Коментар: Ако в момента $t=3$ приходите са били $f(3) \approx 17,7$, то след половин година се очаква да бъдат 22,8.

Други приложения в икономиката

Нека q е обемът на произведената продукция, а $c(q)$ е функцията на разходите за производство. Да означим с Δq допълнително количество на произвежданата продукция при текущо ниво q .

Тогава допълнителните разходи са

$$\Delta c = c(q + \Delta q) - c(q)$$

Относителните разходи са:

$$\frac{\Delta c}{\Delta q} = \frac{c(q + \Delta q) - c(q)}{\Delta q}$$

При $\Delta q \rightarrow 0$ получаваме моментната скорост на изменение на разходите, наречени маргинални разходи

$$c'(q) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta c}{\Delta q} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{c(q + \Delta q) - c(q)}{\Delta q} \quad \text{или} \quad c'(q) = \frac{dc}{dq}$$

Прието е маргиналният разход да се бележи с Mc , т.е.:

$$Mc = c'(q).$$

Пример 10. Известно е, че функцията на разходите има вида:

$$c(q) = 100q - \frac{0,2}{3}q^3$$

Да се намерят маргиналните разходи при $q = 20$ единици обем на производство.

Решение:

$$Mc = c'(q) = 100 - 0,2q^2. \text{ При } q = 20, \quad Mc = 100 - 0,2 \cdot 20^2 = 20.$$

Това означава, че при обем на производството 20 единици, производствените разходи за следващата 21-ва единица са 20.

=====